Cálculo 3A – EP11 – Superfícies parametrizadas. Área de uma superfície parametrizada.

Exercício 1: Seja S a superfície parametrizada por $\varphi(u,v) = \left(u, v, 1-v^2\right)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$.

a) Desenhe S.

b) Determine o plano tangente a S no ponto $\varphi(1/2, 1/4)$.

c) Determine a área de S.

Exercício 2: Esboce e parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 1\right\}$.

b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ z = \sqrt{3(x^2+y^2)},\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.

c) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x+y+z = 2,\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$.

d) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2+y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 2 + \frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right\}$.

e) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \ x^2+y^2 = 2y,\ 0 \leq z \leq x^2+y^2\right\}$.

Exercício 3: Seja $C = \left\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2+(y-2)^2 = 1\right\}$. Ache a área da superfície gerada pela rotação do conjunto C em torno do eixo z.

Exercício 4: Seja S a superfície obtida girando-se o segmento de reta de $(0,1,3)$ a $(0,3,1)$ em torno do eixo z.

a) Dê uma parametrização de S.

b) Calcule a área de S.

Exercício 5: Determine a área do parabolóide $z = 2\left(x^2+y^2\right)$, abaixo do plano $z = 8$.

Exercício 6: Calcule a área da superfície S parte do plano $x+y+z = a$, interior ao cilindro $x^2+y^2 = a^2$.

Exercício 7: Calcule a área da superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x-2)^2+4y^2 \leq 1$.

Exercício 8: Determine a área da porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$, cortada pela parte superior do cone $x^2+y^2 = z^2$.

Respostas

Exercício 1: (b) $17/8$; (c) $\frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5}) + \frac{1}{12}$ *u.a.*

Exercício 2: (a) $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \sqrt{4-r^2}),\ (r,\theta) \in [0, \sqrt{3}] \times [0, 2\pi]$; (b) $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{3(x^2+y^2)}),\ (x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1/4$; (c) $\varphi(x,y) = (x, y, 2-x-y),\ (x,y) \in D : x^2+y^2 \leq 1$; (d) $\varphi(\theta,z) = (2\cos\theta, 2\,\mathrm{sen}\,\theta, z),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2 + \frac{\cos\theta}{2} - \mathrm{sen}\,\theta$; (e) $\varphi(t,z) = (\cos t, 1 + \mathrm{sen}\,t, z),\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq 2(1+\mathrm{sen}\,t)$.

Exercício 3: $8\pi^2$ *u.a.*

Exercício 4: (a) $\varphi(t,\theta) = ((1+2t)\cos\theta, (1+2t)\,\mathrm{sen}\,\theta, 3-2t),\ (t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$; (b) $8\pi\sqrt{2}$ *u.a.*

Exercício 5: $\frac{\pi}{24}(65\sqrt{65} - 1)$ *u.a.*

Exercício 6: $\sqrt{3}\pi a^2$ *u.a.*

Exercício 7: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ *u.a.*

Exercício 8: $\pi(8 - 4\sqrt{2})$ *u.a.*